Keywords: functional-differential inclusion; impulses.

Булгаков Александр Иванович
д. ф.-м. н., профессор
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Alexandr Bulgakov
doctor of phys.-math. sciences, professor
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Корчагина Елена Валерьевна
аспирант
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Elena Korchagina
post-graduate student
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Филиппова Ольга Викторовна
аспирант
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Olga Filippova
post-graduate student
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: philippova.olga@rambler.ru

УДК 517.911.5

СВЯЗНОСТЬ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВОЛЬТЕРРОВЫМ ОПЕРАТОРОМ И ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ [1]

© **А. И. Булгаков, J. P. Munembe**

Ключевые слова: связность множества решений; функционально-дифференциальные уравнения с вольтерровым оператором и импульсными воздействиями.

Аннотация: Здесь приводится теорема о структуре множества решений уравнения в метрическом пространстве, с помощью которой формулируется теорема о связности множества решений задачи Коши функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями.

Вопрос о связности множеств решений задач эволюционного типа имеет богатую историю и восходит к классическим работам А. Кнезера, М. Хукухаре, где он был решен для обыкновенных

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (№ 07-01-00305, 09-01-97503), научной программой "Развитие научного потенциала высшей школы"(РНП № 2.1.1/1131), "Программой Всемирного исследовательского сотрудничества в математике, статистике и информатике"при поддержке SIDA и включена в Темплан № 1.6.07.

дифференциальных уравнений. Этот результат переносился затем многими авторами на объекты более общего вида, в том числе на дифференциальные и интегральные уравнения и включения (Р.В. Ахмеров, Е.Е. Викторовский, Б.Д. Гельман, И.Т. Кигурадзе, А.Я. Лепин, Л.Н. Ляпин, В.П. Максимов, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский, А.Е. Родкина, Б.Н. Садовский, А.А. Толстоногов, А.Ф. Филиппов, И.А. Финогенко, J. Davy, W. Kelley, N. Kikuchi, S. Nakagiri, H. Marakami, S. Szufla и др. (библиографию можно найти в монографиях [1-5])). Плодотворную роль при исследовании вопроса о связности для задач с однозначными операторами сыграла топологическая схема доказательства, разработанная М.А. Красносельским и А.И. Перовым. Здесь приводится теорема, которая обобщает принцип связности М.А. Красносельского и А.И. Перова.

Пусть Y, Y_1— полные метрические пространства. Рассмотрим отображение $P : M \to Y_1$, где $M \subset Y$— замкнутое ограниченное множество, а также уравнение

$$q = P(x), \tag{1}$$

где $q \in \widetilde{Y_1}$. Под решением уравнения (1) понимается всякий элемент $x \in M$, удовлетворяющий (1). Через $H(M)$ обозначим множество всех решений уравнения (1).

Будем говорить, что оператор P q-замкнут, если из условия $q \in \overline{P(E)}$ вытекает, что $q \in P(E)$ для любого замкнутого множества $E \subset M$.

Т е о р е м а 1. *Пусть оператор P q-замкнут. Тогда множество $H(M)$ связно тогда и только тогда, когда по любому $\tau > 0$ можно найти связное множество $X(\tau) \subset M$, удовлетворяющее условиям: $H(M) \subset X(\tau)$; для любого $x \in X(\tau)$ выполняется неравенство $\rho_{Y_1}[q, P(x)] \leqslant \tau$, где $\rho_{Y_1}[\cdot,\cdot]$ – расстояние в метрическом пространстве Y_1.*

Теорему 1 можно использовать для исследования структуры множества решений задачи Коши для функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями. Для этого введем обозначения.

Пусть $t_k \in [a,b] (a < t_1 < \ldots < t_m < b)$— конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{C}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ ограниченных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = 1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{C}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)|, t \in [a,b]\}$, $L^n[a,b]$— пространство суммируемых функций.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \dot{x} = \Phi(x), x(a) = x_0 (\in \mathbb{R}^n) \\ \Delta x(t_i) = I_i(x(t_i)), i = 1,2,\ldots,m, \end{gathered} \tag{2}$$

где непрерывный вольтерров по А.Н. Тихонову оператор $\Phi : \widetilde{C}^n[a,b] \to L^n[a,b]$ обладает свойством: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{C}^n[a,b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией. Отображения $I_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1,2,\ldots,m$ непрерывны, $\Delta x(t_i) = x(t_i + 0) - x(t_i)$, $i = 1,2,\ldots,m$.

Под решением задачи (2) будем понимать такую функцию $x \in \widetilde{C}^n[a,b]$, что для всех $t \in [a,b]$ имеет место равенство

$$x(t) = x_0 + \int_a^t \Phi(x)(s)ds + \sum_{i=1}^m \chi_{(t_i,b]}(t)\Delta x(t_i),$$

где $\chi_{(c,b]}$— характеристическая функция отрезка $(c,b]$.

Пусть $H(x_0)$— множество решений задачи (2).

В силу того, что оператор $\Phi : \widetilde{C}^n[a,b] \to L^n[a,b]$ вольтерров, естественным образом можно ввести определение решения (локального) на любом отрезке $[a,\tau] \subset [a,b]$ задачи (2). Пусть $H(x_0,\tau)$— множество всех решений задачи (2) на отрезке $[a,\tau]$.

Будем говорить, что множество решений задачи (2) ($H(x_0)$) априорно ограничено, если существует такое $r > 0$, что для любого $\tau \in (a,b]$ не существует $y \in H(x_0,\tau)$, что $\|y\|_{\widetilde{C}^n[a,b]} > r$.

Используя теорему 1 и результат работы [6], можно доказать следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Пусть множество решений задачи* (2) *априорно ограничено. Тогда множество* $H(x_0)$ *— непустой связный компакт пространства* $\widetilde{C}^n[a,b]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматулина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.Н., Потапов А.С., Родкина А.Е., Садовский Б.Н.* Теория уравнений нейтрального типа // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 19. С. 55–126.
3. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси: ТбГУ, 1975.
4. *Мышкис А.Д.* Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // УМН. 1949. Т. 4. Вып. 5. С. 99–141.
5. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
6. *Булгаков А.И., Ляпин Л.Н.* О связности множеств решений функциональных включений // Матем. сб. 1982. Т. 119, № 2. С. 295-300.

Abstract: The theorem about the structure of the solutions set of an equation in a metric space is given. Based on this result, there is also formulated the theorem on connectedness of the solutions set of the Cauchy problem for a functional-differential inclusion with impulses.

Key words: the solutions set connectedness; functional-differential equations with Volterra operator and impulses.

Булгаков Александр Иванович
д. ф.-м. н., профессор
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Alexandr Bulgakov
doctor of phys.-math. sciences, professor
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Мунембе Джоао Пауло
д. ф.-м. н., профессор
Университет Эдуардо Мондлане
Мозамбик, Мапуту
e-mail: munembe@member.ams.org

Joao Paulo Munembe
doctor of phys.-math. sciences, professor
Eduardo Mondlane University
Mozambique, Maputo
e-mail: munembe@member.ams.org